CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008

CLASA A IV-A

1. Aflați numerele *a* şi *b* care respectă simultan condițiile:

a) dacă din *a* scad 7, iar la *b* adaug 7, obțin numere egale.

b) Suma dintre triplul lui *a* şi triplul lui *b* este 168.

2. a) Scrieți trei numere pare consecutive, descrescătoare.

b)Câtul şi restul împărțirii numărului natural *a* la 9 sunt două numere impare consecutive. Aflați valorile lui *a*.

3. Se consideră mai multe numere naturale consecutive, astfel încât diferența dintre cel mai mare şi cel mai mic este 100, iar suma ultimelor 5 numere este 1565. Câte numere sunt şi care este suma primelor 5 numere?

4. Tatăl, mama şi cei trei copii au împreună 94 de ani. Vârstele copiilor sunt reprezentate de numere consecutive pare, iar tatăl este cu doi ani mai în vârstă decât mama. La naşterea celui de-al treilea copil, mama avea de 7 ori vârsta primului copil. Câți ani are acum fiecare?

Probleme selectate de inst. Nen Ion şi înv. Moşteanu Constantin.

NOTĂ: Timp de lucru 2 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,

6 DECEMBRIE 2008

CLASA A IV-A

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I		
a)	demonstrează că $a > b$ cu 14	2p
b)	Află suma $a + b$	2p
c)	Află pe b	2p
d)	Află pe a	1p
	TOTAL	**7p**
SUBIECTUL II		
a)	Scrie trei numere consecutive descrescătoare	1p
b)	6 soluții (1p fiecare)	6p
	TOTAL	**7P**
SUBIECTUL III		
a)	Află câte numere consecutive sunt	1p
b)	Află ultimele cinci numere	2p
c)	Află primele cinci numere	3p
d)	Află suma primelor cinci numere	1p
	TOTAL	**7P**
SUBIECTUL IV		
a)	Demonstrează (află) vârsta primului copil în momentul nașterii celui de-al treilea copil	2p
b)	Află vârstele tuturor la nașterea celui de-al treilea copil	1p
c)	Află suma vârstelor în momentul de la b)	0,5p
d)	Află diferența dintre sumele vârstelor	0,5p
e)	Află intervalul de șase ani	1p
f)	Calculează câți ani are acum fiecare	2p
	TOTAL	**7P**

Notă: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător.

CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008

CLASA A V-A

1) a) Fie numărul $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{2009}$. Arătaţi că numărul A nu este pătrat perfect.
   b) Calculaţi suma $S = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 + ... + 6 \cdot 7^{2008}$.

2) Dacă numărul 2^{2008} are *n* cifre şi numărul 5^{2008} are *m* cifre, să se afle suma $n + m$.

3) a) Aflaţi câte numere naturale cuprinse între 2008 şi 20008 dau restul 28 la împărţirea cu 208.
   b) Calculaţi suma numerelor de la punctul anterior.

4) a) Comparaţi numerele 483^{2008} şi 22^{6025}.
   b) Într-un coş sunt mere şi prune, astfel încât jumătate din numărul merelor este egal cu o cincime din numărul prunelor. Se iau patru mere şi patru prune şi rămân de patru ori mai multe prune decât mere. Câte mere şi câte prune au fost?

Probleme selectate de prof. Ştefan Alexe jr.

NOTĂ: Timp de lucru 2 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008

CLASA A V-A

BAREM DE CORECTARE

1)

a) Grupăm termenii din sumă:

$A=\left(1+7+7^2+7^3\right)+\left(7^4+7^5+7^6+7^7\right)+...+\left(7^{2004}+7^{2005}+7^{2006}+7^{2007}\right)+\left(7^{2008}+7^{2009}\right)$

Ultima cifră a sumei din ultima paranteză este 8 1p

Ultima cifră a sumelor din celelalte paranteze este 0 1p

Ultima cifră a lui A este 8 1p

Numărul A nu poate fi pătrat perfect 1p

b) Scriem de fiecare dată $6=7-1$:

$S=(7-1)\cdot 7+(7-1)\cdot 7^2+(7-1)\cdot 7^3+...+(7-1)\cdot 7^{2008}$ 1p

$S=7^2-7+7^3-7^2+7^4-7^3+...+7^{2009}-7^{2008}$ 1p

$S=7^{2009}-7$ 1p

2)

$\underbrace{1000...0}_{n\text{ cifre}}<2^{2008}<\underbrace{1000...0}_{n+1\text{ cifre}} \Leftrightarrow 10^{n-1}<2^{2008}<10^n$ 2p

$\underbrace{1000...0}_{m\text{ cifre}}<5^{2008}<\underbrace{1000...0}_{m+1\text{ cifre}} \Leftrightarrow 10^{m-1}<5^{2008}<10^m$ 2p

Obținem: $10^{n+m-2}<10^{2008}<10^{n+m}$ 1p

$n+m-2<2008<n+m \Leftrightarrow \begin{cases} n+m-2<2008 \\ 2008<n+m \end{cases}$ 1p

$\begin{cases} n+m<2010 \\ 2008<n+m \end{cases} \Rightarrow n+m=2009$ 1p

3)

a) Avem:

$208\cdot 9+28=1900<2008$

$208\cdot 10+28=2108$

$208\cdot 11+28=2316$

………….

$208\cdot 96+28=19996$

$208\cdot 97+28=20204>20008$ 2p

Numerele căutate sunt : $208\cdot 10+28$, $208\cdot 11+28$,…, $208\cdot 96+28$ 1p

Sunt 87 numere 1p

b) Calculul sumei: $S = 961524$ 3p

4)

a)

$483^{2008} < 484^{2008} = 484^{2\cdot 1004} = \left(22^2\right)^{2008} = 22^{4016}$ 1p

$22^{6025} > 22^{6024}$ 1p

Obținem $483^{2008} < 22^{6025}$ 1p

b) Deduce numărul de mere 8…………2p
deduce numărul de prune 20………….2p
folosind metoda figurativă sau metoda algebrică.
NOTĂ. Menționarea rezultatului presupune acordarea a 1 P.

CONCURSUL „DAN BARBILIAN", MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008

CLASA A VII-A

1. Calculați $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2008}$, dacă $\frac{a_1}{a_1+1} = \frac{a_2}{a_2+2} = ... = \frac{a_{2008}}{a_{2008}+2008}$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + ... + \frac{2008}{a_{2008}} = 6024$.

2. Fie ABCD paralelogram şi ACED trapez isoscel, unde AC | | DE. Demonstrați că DE $\perp$ BE.

3. a) Să se demonstreze că un pătrat perfect poate avea numai forma 3k sau 3k+1,unde k este un număr natural.

b) Demonstrați că numărul $\sqrt{n(n+2005)(n+2006)+2009}$ este număr irațional pentru orice număr natural *n*.

4. În patrulaterul convex ABCD, se consideră punctele M şi N respectiv pe laturile [AB] şi [BC], astfel încât AN şi CM împart patrulaterul în două figuri echivalente:

a) Demonstrați că MN || AC;
b) Demonstrați că mijlocul segmentului [BD] este situat pe dreapta MN.

Probleme selectate de prof. Octavian STROE

Notă: Timp de lucru 3 (trei) ore. Toate subiectele sunt obligatorii.
Subiectele se notează de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008
CLASA A VII-A
BAREM DE CORECTARE

1. Din relația $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+...+\frac{2008}{a_{2008}}=6024$, rezultă

$\frac{a_1+1}{a_1}+\frac{a_2+2}{a_2}+\frac{a_3+3}{a_3}+...+\frac{a_{2008}+2008}{a_{2008}}=8032$ (2p).

De aici $\frac{a_1+1}{a_1}=\frac{a_2+2}{a_2}=\frac{a_3+3}{a_3}=...=\frac{a_{2008}+2008}{a_{2008}}=4$ (2p), de unde $a_i=\frac{i}{3}, i=\overline{1,2008}$ (2p).

Prin urmare $S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+...\frac{2008}{3}=\frac{1004\cdot 2009}{3}$ (1p).

2. Din ABCD paralelogram rezultă [AD] ≡ [BC], şi ∢ACB ≡ ∢DAC (2p)

Din ACED trapez isoscel cu AC | | DE rezultă [AD] ≡ [CE] şi ∢DAC = ∢ACE (1p)

Prin urmare [BC] ≡ [CE] şi ∢ACB = ∢ACE (1p)

Aşadar triunghiul BCE este isoscel şi cum (CA este bisectoare a unghiului ∢BCE rezultă CA ⊥ BE (2p)

Dar AC | | DE, deci DE ⊥ BE. (1p)

3. a) Dacă n se divide cu 3 rezultă că n^2 are forma 3k. (1p)
Dacă n nu se divide cu 3 rezultă că n^2 are forma 3k+1. (2p)
b) Numărul $n(n+2005)(n+2006)+2009$ are forma 3k+2, (3p)
prin urmare nu poate fi un pătrat perfect şi de aici rezultă concluzia. (1p)

4. a) Notăm S= $\mathcal{A}_{ABCD}$. Atunci din enunț avem $\mathcal{A}_{ABN}$= $\mathcal{A}_{BCM}$=1/2 S (1p). Cum $\mathcal{A}_{ABC}$= $\mathcal{A}_{BCM}+\mathcal{A}_{AMC}=\mathcal{A}_{ANC}+\mathcal{A}_{ABN}$ rezultă $\mathcal{A}_{ANC}=\mathcal{A}_{AMC}$ (2p). Triunghiurile ANC şi AMC au înălțimile corespunzătoare laturii [AC] egale, deci M şi N sunt situate pe o paralelă la AC. (1p)

b)

Dacă $MN\cap BD=\{O\}$, atunci din $MN \parallel AC$ rezultă că $\mathcal{A}_{ANC}=\mathcal{A}_{AOS}=\mathcal{A}_{AMC}$. Avem

$\mathcal{A}_{AOCD}=\mathcal{A}_{ADC}+\mathcal{A}_{AOC}=\mathcal{A}_{ADC}+\mathcal{A}_{AMC}=\mathcal{A}_{AMCD}=\frac{1}{2}S.(1p)$

Pe de altă parte $\mathcal{A}_{AOD}=\frac{DO}{DB}\cdot\mathcal{A}_{ABD}$; $\mathcal{A}_{DOC}=\frac{DO}{DB}\mathcal{A}_{BCD.}$ (1p)

Adunăm relațiile $\mathcal{A}_{AOD}+\mathcal{A}_{DOC}=\frac{DO}{DB}\mathcal{A}_{ABD}+\frac{DO}{DB}\mathcal{A}_{BCD}=\frac{DO}{DB}(\mathcal{A}_{ABO}+\mathcal{A}_{BCD})=\frac{DO}{DB}\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{DO}{DB}S.$ sau

$\frac{1}{2}S=\frac{DO}{DB}S$, de unde O este mijlocul lui [BD] (1p).

Notă: Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător

CONCURSUL „DAN BARBILIAN", MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008

CLASA A VIII-A

1. a) Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

b) Să se determine numerele naturale cu proprietatea că $\sqrt{n} + \sqrt{n+2009} \in \mathbb{Q}$.

Elena Codeci, Curtea de Argeş

2. Se consideră tetraedrele regulate $ABCD$ şi $ABCE$ ale căror interioare sunt disjuncte. Fie O centrul triunghiului ABC.

a) Demonstraţi că punctele D, O, E sunt coliniare .
b) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei „*BECD* este romb" şi justificaţi răspunsul dat .
c) Demonstraţi că dreapta CD nu este perpendiculară pe dreapta EC .

Daniel Codeci, Curtea de Argeş

3. a) Demonstraţi că numărul 2009 se poate scrie ca o sumă de patru pătrate şi că numărul 2007 se poate scrie ca sumă de trei pătrate.

b) Folosind, eventual, afirmaţia de la punctul a), reprezentaţi pe axa reală, cu o trusă geometrică obişnuită, numărul $\sqrt{2009} - \sqrt{2008}$.

Adrian Ţurcanu, Goleşti

4. Se considera mulţimile de numere reale $A = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$ si $B = \{b_1, b_2, .., b_{10}\}$ cu proprietatea ca $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = b_1 + b_2 + ... + b_{10}$. Notăm $M = \{a_1 - a_2, a_2 - a_1, ..., a_{10} - a_1, a_1 - a_{10}\}$ şi $N = \{b_1 - b_2, b_2 - b_1, ..., b_{10} - b_1, b_1 - b_{10}\}$(Se fac toate diferenţele de câte doi termeni). Să se arate ca dacă $M = N$, atunci $A = B$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

CONCURSUL „DAN BARBILIAN”, MIOVENI,
6 DECEMBRIE 2008 , CLASA A VIII-A, BAREM DE CORECTARE

1. a) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{Q},\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
$\sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, ………………………………………………. 1p

de unde se obține că $2\sqrt{a}$, $2\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$ .. 1p

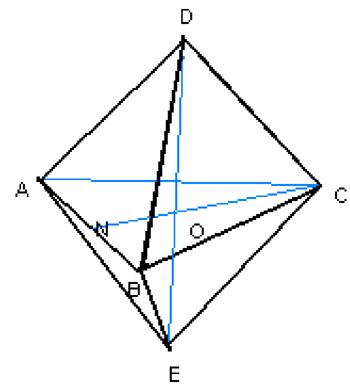
Analiza cazului $a = b$ ……………1p

b) Se notează $a = \sqrt{n}$ şi $b = \sqrt{n+2009}$, $a + b \in \mathbb{Q}$, $b^2 - a^2 = 2009$

$\Leftrightarrow (b + a)(b - a) = 2009 = 7^2 \cdot 41$ …………………………………… 2p

Cum $b = \sqrt{n+2009} \geq \sqrt{2009} > \sqrt{1936} = 44 \Rightarrow a + b > 44$, se disting cazurile :
analiza şi finalizarea ..2p. Deci $n \in \{16;19600;1008016\}$

2. a) Tetraedrele fiind regulate înălțimile lor duse din D, respectiv E, cad în centrul bazei , care este triunghiul ABC .Cum perpendiculara dusă pe un plan ,într-un punct al său , este unică, rezultă că punctele D , E , O sunt coliniare.
…………………………… 2p



b) Presupunem că BECD ar fi romb $\Rightarrow BC \cap DE = \{M\}$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow$
$M \in (ABC)$, cum $M \in DE \Rightarrow M \in (ABC) \cap DE = \{O\} \Rightarrow O = M \in BC$ –imposibil pentru că $O \in \text{Int}\,\Delta ABC$
………………………….. 2p

d) Se notează cu a lungimea unei muchii $\Rightarrow CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $DO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$,

$DE = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow DE^2 = \dfrac{8a^2}{3}$ ………………… 2p

Cum $DC^2 + CE^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 < \dfrac{8a^2}{3} = DE^2$, utilizând RTP în ΔDEC, $CD \not\perp EC$. …………… 1p

3. a) Descompunerea ca sume de pătrate a numerelor 2008 şi 2009 ….3p
b) Construcția segmentelor de lungimi $\sqrt{2008}$ şi $\sqrt{2009}$ ….2p
Reprezentarea pe axă a numărului real $a = \sqrt{2009} - \sqrt{2008}$ ……..2p

4. Considerăm ordonările: $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_{10}}$ si $b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \ldots \geq b_{i_{10}}$ unde $\{i_1, i_2, .., i_{10}\} = \{1, 2, ..., 10\}$.
Atunci cel mai mare element din A este a_{i_1} , iar cel mai mic este $a_{i_{10}}$. În mod asemanător cel mai mare element din B este b_{i_1} , iar cel mai mic este $b_{i_{10}}$. Pe baza acestui rationament avem ordonarile:
$a_{i_1} - a_{i_{10}} \geq a_{i_1} - a_{i_9} \geq .... \geq a_{i_1} - a_{i_2}$ şi $b_{i_1} - b_{i_{10}} \geq b_{i_1} - b_{i_9} \geq .... \geq b_{i_1} - b_{i_2}$. (1p). Insa aceste diferente sunt cele mai mari numere din multimile M, respectiv N, chiar in aceasta ordine si cum $M = N$, obtinem egalitatile:
$a_{i_1} - a_{i_{10}} = b_{i_1} - b_{i_{10}}, a_{i_1} - a_{i_9} = b_{i_1} - b_{i_9}, ..., a_{i_1} - a_{i_2} = b_{i_1} - b_{i_2}$ (1) (2p) şi prin adunare conduc la egalitatea:
$9 \cdot a_{i_1} - \left(a_{i_2} + a_{i_3} + ... + a_{i_{10}}\right) = 9 \cdot b_{i_1} - \left(b_{i_2} + b_{i_3} + ... + b_{i_9}\right)$ care se mai poate scrie
$10 \cdot a_{i_1} - \left(a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + ... + a_{i_{10}}\right) = 10 \cdot b_{i_1} - \left(b_{i_1} + b_{i_2} + b_{i_3} + ... + b_{i_9}\right)$ (2) (2p) .
Tinand cont de egalitatea $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = b_1 + b_2 + ... + b_{10}$ si de $\{i_1, i_2, .., i_{10}\} = \{1, 2, ..., 10\}$,
obtinem egalitatea $a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_{10}} = b_{i_1} + b_{i_2} + ... + b_{i_{10}}$ (1p) si atunci relatia (2) devine $a_{i_1} = b_{i_1}$ si mergand in relatiile (1) obtinem egalitatile $a_{i_2} = b_{i_2}, ..., a_{i_{10}} = b_{i_{10}}$, de unde vom obtine ca $A = B.$ (1p)

Notă: **Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează corespunzător.**